数理解析研究所講究録
1058 巻 1998 年 149-163

QUILLEN の計量と判別式

吉川 謙一（KEN-ICHI YOSHIKAWA）
名古屋大学・多元数理科学研究科

本稿は研究集会「多変数関数論にあらわれる解析と幾何」での筆者の講演に加筆したものである。同時期に開催された研究集会「特異点と複素解析幾何」でも同様の内容の講演をした。本稿独自の内容として Quillen 計量と射影的双対性との関連を論じた部分がある。本稿で触れられなかった話題に、孤立特異点の平滑化と解析的トーションの挙動を論じた部分と Andreotti-Mayer 形式の積分公式について論じた部分がある。「特異点 … 」の筆者の稿を見て頂けると幸いである。

1. 楕円曲線の判別式

Jacobi の Δ-関数とは以下で定義される保型関数である：

$$\Delta(\tau)=q\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24},\quad q=\exp(2\pi i\tau),\quad \tau\in\mathbb{H}. \tag{1.1}$$

$\Delta(\tau)$ は次の 3 つの特徴付けを持つ。

(1) $\Delta(\tau)$ は唯一の重さ 12 の尖点形式である。

$$\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^{12}\Delta(\tau),\qquad \lim_{Im\tau\to+\infty}\Delta(\tau)=0. \tag{1.2}$$

(2) $\Delta(\tau)$ は楕円曲線の判別式である (Jacobi)。

$E_\tau:=\mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$ の Weierstrass 表示を $y^2=4x^3-g_2(\tau)x-g_3(\tau)$ とする時、

$$g_2(\tau)^3-27g_3(\tau)^2=(2\pi)^{12}\Delta(\tau). \tag{1.3}$$

(3) $\Delta(\tau)$ は E_τの解析的トーションである（Kronecker 極限公式）。

$g_\tau = \frac{|dz|^2}{(Im\tau)}$ を E_τ の Kähler 計量、

$\tau(E_\tau) = \exp(\zeta_\tau'(0))$ を (E_τ, g_τ) の解析的トーションとする時、

$$Im\,\tau \cdot \tau(E_\tau) = (2\pi)^2|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}. \tag{1.4}$$

(3)' $\Delta(\tau)$ はコホモロジーの行列式の標準的な断面のノルムである。

$p:\mathbb{E}\to\mathbb{H}$ を $\mathbb{H}$ 上の楕円曲線の基本族（$p^{-1}(\tau)=E_\tau$），

$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{E}}) := \det p_*\mathcal{O}_{\mathbb{E}} \otimes (\det R^1 p_*\mathcal{O}_{\mathbb{E}})^{-1}$ をコホモロジーの行列式、

$\sigma_{\mathbb{E}} = 1\otimes dz$ を $\lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})$ の標準的断面、$\|\cdot\|_Q$ を Quillen 計量とする時、

$$\|1\otimes dz\|_Q^2(\tau) = (2\pi)^2|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}. \tag{1.5}$$

<u>定理 **1.1**</u>. 楕円曲線の基本族に対して解析的トーションは判別式と一致し、

それは *Jacobi* の Δ-関数である。

次に問題は定理 1.1 の高次元化を考えるに際して基本的であり、本稿の主題である。

<u>問題 **1.1**</u>. *Kronecker* 極限公式の自然な高次元化を見つけよ。

候補となる幾何学的対象として $c_1(X)=0$ となる Kähler 多様体を考える：

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{g=1} & & \underline{g=2} & & \underline{g\geq 3} \\
 & & Abel\text{曲面} & \longrightarrow & Abel\text{多様体} \\
 & \nearrow & & & \\
\text{楕円曲線} & & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & K3\text{曲面} & \longrightarrow & Calabi-Yau\text{多様体} \\
 & & Enriques\text{曲面} & & hyper-Kahler\text{多様体}
\end{array}$$

本稿では Abel 多様体の系列で Kronecker 極限公式を一般化する。K3 曲面や Enriques 曲面については Jorgenson-Todorov の研究（[J-T1,2]）がある。また、Abel 多様体の場合については Jorgenson-Kuramer（[J-K]）が筆者と類似した内容を扱っている。

2. コホモロジーの行列式と Quillen 計量

2.1 解析的トーション.

(M, g_M) をコンパクト Kähler 多様体、

$\square_{0,q}$ を M 上の $(0,q)$-形式に作用するラプラシアン、

$\sigma(\square_{0,q}) = \{0 \leq \cdots \leq 0 \leq \lambda_{0,q}(1) \leq \lambda_{0,q}(2) \leq \cdots\}$ を$\square_{0,q}$ のスペクトル,

$\zeta_{0,q}(s) := \sum_{k\geq 1} \lambda_{0,q}(k)^{-s}$ を (M, g_M) のスペクトル ζ-関数とする。

この時、$\zeta_{0,q}(s)$ は全平面上有理型で、$s=0$ で正則である (Seeley)。

定義 2.1. 解析的トーションとは次式で定義される実数である：

$$\tau(X) := \prod_{q\geq 0} (\det \square_{0,q})^{(-1)^q q}, \quad \det \square_{0,q} := \exp\left(- \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \zeta_{0,q}(s)\right).$$

2.2 コホモロジーの行列式.

$\pi : X \to S$ を複素多様体間の固有平滑 Kähler 射とする。

定義 2.2. コホモロジーの行列式とは以下で定義される S 上の直線束である：

$$\lambda_X := \bigotimes_{q\geq 0} (\det R^q \pi_* \mathcal{O}_X)^{(-1)^q}.$$

λ_X には次のようにして計量が入る。

$g_{X/S}$ を相対接束 $TX/S := \ker \pi_*$ 上の Kähler 計量、

$\mathcal{H}^{0,q}(X_t)$ をファイバー X_t 上の調和 $(0,q)$-形式の空間とする。

Hodge の定理より、λ_X のファイバーは調和形式の空間の行列式と見なせる：

$$\lambda_{X_t} = \bigotimes_{q\geq 0} (\det H^q(X_t, \mathcal{O}_{X_t}))^{(-1)^q} \cong \bigotimes_{q\geq 0} \left(\det \mathcal{H}^{0,q}(X_t)\right)^{(-1)^q} \tag{2.1}$$

これより調和形式の積分を通じて λ_X に Hermite 直線束の構造が入り、この計量を L^2-計量と呼び、$\|\cdot\|_{L^2}$ と書く。

<u>定義 2.3</u>. λ_X の $g_{X/S}$ に関する *Quillen* 計量とは以下で定義される *Hermite* 計量のことである： $\|\cdot\|_Q^2(t) := \tau(X_t)\cdot\|\cdot\|_{L^2}^2(t)$.

次の 2 定理は Quillen 計量に関して最も基本的である。

<u>定理 2.1</u>([B-G-S]). $c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q)$ を $(\lambda_X, \|\cdot\|_Q)$ の *Chern* 形式とすれば、

$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)}.$$

<u>定理 2.2</u>([B-G-S]). $g_{X/S}$, $g'_{X/S}$ を *Kähler* 計量の族、$\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|'_Q$ を $g_{X/S}$, $g'_{X/S}$ に関する λ_X の *Quillen* 計量とすれば、

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q}\right)^2 = \pi_*(\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S}))^{(0,0)}.$$

但し、$\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S})$ は *Bott-Chern* 類である。

Quillen 計量の境界挙動に関連して、次の問題は基本的である。

<u>問題 2.1</u>. $\pi : X \to S$ が特異ファイバーを持つ場合に、λ_X の曲率を計算せよ

そこで最も一般的な退化の場合に問題 2.1 を考える。

<u>定義 2.4</u>. $\pi : X \to S$ を複素多様体間の射影的固有正則射、S を単位円盤とする。
(π, X, S) が孤立特異点の平滑化 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1) & \Sigma(\pi) := \{x \in X;\ d\pi(x) = 0\} \subset X_0, \\ 2) & \#\,\Sigma(\pi) < \infty. \end{cases}$
この時、特異ファイバー X_0 は超曲面孤立特異点のみを特異点として許容する。

g_X を X の Kähler 計量、$g_{X/S}$ を g_X から入る TX/S の Kähler 計量、$\|\cdot\|_Q$ を $g_{X/S}$ に関する λ_X の Quillen 計量とする。

<u>定理 2.3</u>. $\|\cdot\|_Q$ は λ_X の特異 *Hermite* 計量で、曲率は次式で与えられる：

$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}\mu(X_0)\delta_0.$$

$(n = \dim X/S,\ \mu(X_0)$：特異ファイバーの全 *Milnor* 数、$\delta_0 := -\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log|t|^2)$
測度と見た時、右辺第 1 項が連続部分を第 2 項が特異部分に対応している。

2.3 Quillen 計量と射影的双対性.

M^n を非特異射影的代数多様体/$\mathbb{C}$、$L \to M$ を非常に豊富な直線束とし、

$\{s_i\}$（$s_i \in H^0(M,L)$）を $H^0(M,L)$ の基底とする：

$$H^0(M,L) = \mathbb{C}\,s_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\,s_N. \tag{2.2}$$

以下、この節では $M \subset \mathbb{P}^N$ は線形非退化であると仮定する。即ち、任意の超平面 H_a ($a \in \mathbb{P}^N$) に対して、$M \not\subset H$ である。特に、$X_a := M \cap H_a$ は M の因子である。

$\pi : X \to \mathbb{P}^N$ を完備線形系 $|L|$ に属する豊富因子の族（$\pi^{-1}(a) = X_a$）とする：

$$X := \{(x,a) \in M \times \mathbb{P}^N;\ \sum_{i=0}^{N} a_i\, s_i(x) = 0\} \subset M \times \mathbb{P}^N. \tag{2.3}$$

$M^\vee := \{a \in \mathbb{P}^N;\ Sing\, X_a \neq \emptyset\}$ を $(\pi, X, \mathbb{P}^N)$ の判別式軌跡とする。$M^\vee$ は (M,L) の射影双対である。即ち、

$$\gamma : \mathbb{P}(N^*_{M/\mathbb{P}^N}) \ni \sum_i a_i dz_i \to (a_0 : \cdots : a_N) \in \mathbb{P}^N \tag{2.4}$$

を Gauss 写像とする時、$M^\vee = \gamma(\mathbb{P}(N^*_{M/\mathbb{P}^N}))$ である。

g_M を M の Kähler 計量、$g_{X/\mathbb{P}^N}$ を g_M から入る $TX/\mathbb{P}^N$ の Kähler 計量、

$\|\cdot\|_Q$ を $g_{X/\mathbb{P}^N}$ に関する λ_X の Quillen 計量とする。簡単な計算により、

$$\lambda_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(\chi(M, L^{-1})) \quad (\chi(M,L) = \sum_q (-1)^q \dim H^q(M,L)) \tag{2.5}$$

である。Lefschetz ペンシルはペンシル全体の空間で一般なので ([K])、定理 2.3 に Bismut-Bost の議論 ([B-B]) を組み合わせれば次が従う。

<u>定理 2.4</u>**.** $\|\cdot\|_Q$ は λ_X の特異 *Hermite* 計量で、その曲率は次式で与えられる：

$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\delta_{M^\vee} + \pi_*(Td(TX/\mathbb{P}^N, g_{X/\mathbb{P}^N}))^{(1,1)}.$$

特に、*Quillen* 計量の特異軌跡は因子として判別式軌跡に一致する。

<u>注意</u>. $\dim M^\vee < N-1$ の時、$\delta_M = 0$ である。実際、$\delta_{M^\vee}$ は $\mathbb{P}^N$ の $(N-1, N-1)$-形式上のカレントである。

定理 2.4 より、Quillen 計量と判別式軌跡が一致するためには以下の条件が必要十分である：

(2.6)
$$\pi_*(Td(TX/\mathbb{P}^N, g_{X/\mathbb{P}^N}))^{(1,1)} \equiv 0$$

そのためには

(2.7)
$$\dim M^\vee = N-1, \quad \deg \lambda_X = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \deg M^\vee$$

が必要である。Riemann-Roch の公式と Katz の公式 ([K]) を組み合わせれば、(2.6) には次の位相的障害が存在する：

(2.8)
$$\dim M^\vee = N-1, \quad (n+1)!\, e^{c_1(L)-c_1(M)} Td(M)[M] = \frac{(-1)^N}{\deg \gamma} c(M)\,(1+c_1(L))^{-2}[M].$$

ここで $\dim M^\vee = N-1$ の時、$\gamma : \mathbb{P}(N^*_{M/\mathbb{P}^N}) \to \mathbb{P}^N$ は有限射となるので、$\deg \gamma$ は定義できる。逆に (2.8) が成立する時、Hodge の定理より $f \in L^1(\mathbb{P}^N)$ が存在して、$\|\cdot\|'_Q := e^f \cdot \|\cdot\|_Q$ と置けば、次が成立する：

(2.9)
$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|'_Q) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \delta_{M^\vee}.$$

(2.6) が成立する重要な例として、$M = A$: *Abel*多様体、g_A：平坦計量、L：豊富因子の場合がある。

<u>注意</u>. 本節では射影空間 $\mathbb{P}^N$ とその双対空間 $(\mathbb{P}^N)^\vee$ を区別しなかった。

3. Abel 多様体の判別式

第1節で考えたことを Abel 多様体に対して考える。

$\mathfrak{S}_g := \{\tau \in M(g;\mathbb{C});\, {}^t\tau = \tau,\, Im\,\tau > 0\}$ を g 次 Siegel 上半空間、

$\Lambda = \{\Lambda_\tau := \mathbb{Z}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, e_g \oplus \mathbb{Z}\, \tau_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, \tau_g\}_{\tau\in\mathfrak{S}_g}$ を $\mathbb{C}^g$ の格子族、

$A_\tau := \mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$ （$1_g = (e_1, \cdots, e_g)$, $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_g) \in \mathfrak{S}_g$）を Abel 多様体、

$p : \mathbb{A} := \mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g/\Lambda \to \mathfrak{S}_g$ を $\mathfrak{S}_g$ 上の主偏曲 Abel 多様体の基本族（$p^{-1}(\tau) = A_\tau$）、

$T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g = \ker p_* = \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \frac{\partial}{\partial z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \frac{\partial}{\partial z_g}$ を $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ の相対接束、

$g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = \{g_\tau\}_{\tau\in\mathfrak{S}_g}$ を $T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g$ の Kähler 計量（$g_\tau := {}^t dz(Im\,\tau)^{-1} d\bar{z}$）、

$\Gamma_g := Sp(2g;\mathbb{Z})$ を Siegel モジュラー群とする。

Γ_g は次のように $\mathbb{A}$ に作用する：$\forall\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g, \quad \forall(z,\tau) \in \mathbb{A},$

$$(3.1) \qquad \gamma \cdot (z,\tau) = ({}^t(C\tau + D)^{-1} z, (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}), \quad \gamma^* g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}.$$

定理 1.1 の素朴な類似として、次の問題は自然である。

<u>問題 3.1</u>. *Abel 多様体の解析的トーションは何か？*

<u>定理 3.1</u>**(Ray-Singer).** $\tau(A_\tau) \equiv 1 \quad (g > 1).$

即ち、$\tau(A_\tau)$ は何ら保型形式を生み出さない。この理由を考えるために、$(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式を見てみる。定義より、$\lambda_{\mathbb{A}} = \bigotimes_{q\geq 0} (\det R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{(-1)^q}$ が $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式である。Γ_g の $\mathbb{A}$ への作用はファイバーをファイバーに移すので、Γ_g は q-次順像 $R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ に作用する。従って、$\lambda_{\mathbb{A}}$ にも作用する。又、ファイバーが Abel 多様体なので次が従う：

$$(3.2) \qquad \bigwedge^q R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \cong_{\Gamma_g} R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}}.$$

一方、勝手なベクトル束 F に対して、

$$(3.3) \qquad \bigotimes_{q\geq 0} (\wedge^q F)^{(-1)^q} \cong \begin{cases} F^\vee & (rank\, F = 1) \\ 1 & (rank\, F > 1) \end{cases}$$

が成立するので、次が従う：

$$\lambda_{\mathbb{A}} \cong_{\Gamma_g} \begin{cases} p_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} & (g=1) \\ \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \cdot 1_{\mathbb{A}} & (g>1). \end{cases} \tag{3.4}$$

ここで $\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$ は $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ の相対標準束である。

命題 **3.1**. $g>1$ ならば $\lambda_{\mathbb{A}}$ の Γ_g-不変な断面 $1_{\mathbb{A}} \in H^0(\mathfrak{S}_g, \lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}))_{\Gamma_g}$ が存在して、$\|1_{\mathbb{A}}\|_Q(\tau) \equiv 1$ が成立する。

この様に、$g=1$ と $g>1$ とではコホモロジーの行列式の構造が全く異なる。従って、次の問題が生ずる。

問題 **3.2**. コホモロジーの行列式が楕円曲線の基本族の一般化となる族は何か？

4. テータ因子の判別式

4.1 テータ因子. $\forall a, b \in \mathbb{R}^g$、添字付きテータ関数を次式で定義する：

$$\theta_{a,b}(z,\tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left({}^t(m+a)\,\tau\,(m+a) + 2\,{}^t(m+a)\,(z+b)\right). \tag{4.1}$$

$\theta(z,\tau) := \theta_{0,0}(z,\tau)$ をテータ関数、

$\Theta_\tau := \{z \in A_\tau;\ \theta(z,\tau)=0\}$ を A_τ のテータ因子、

$p : \Theta \to \mathfrak{S}_g$ をテータ因子の基本族（$p^{-1}(\tau) = \Theta_\tau$）、

$\Gamma_g(1,2) := \{\gamma \in \Gamma_g; \gamma \cdot \Theta = \Theta\} \subset \Gamma_g$ を Γ_g の指数有限な部分群、

$N_g := \{\tau \in \mathfrak{S}_g;\ Sing\,\Theta_\tau \neq \emptyset\}$ を Andreotti-Mayer 軌跡とする。

命題 **4.1**. N_g は Γ_g-不変な $\mathfrak{S}_g$ 上の因子である。

$\mathbb{A}$ 上の $\Gamma_g(1,2)$-層の完全列：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}}(-\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Theta} \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

に小平消滅定理を組み合わせることにより、次の同型が得られる：

$$\lambda_\Theta \cong_{\Gamma_g(1,2)} \lambda_{\mathbb{A}} \otimes (p_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g})^{(-1)^g}. \tag{4.3}$$

従って、λ_Θ は次の楕円曲線の場合に類似した標準的断面を持つ：

$$\sigma_\Theta(\tau) := 1_{\mathbb{A}}(\tau) \otimes (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)_\tau^{(-1)^g}. \tag{4.4}$$

<u>命題 **4.2**</u>. テータ因子の基本族 $(p, \Theta, \mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式は楕円曲線の基本族のコホモロジーの行列式の自然な一般化である。

そこで次の問題は自然であろう。

<u>問題 **4.1**</u>. テータ因子の解析的トーションは何か？

4.2 <u>一般の豊富因子</u>. $L := \mathcal{O}_{\mathbb{A}}([\Theta])$ を豊富因子 Θ の定める直線束、$V_m := \mathbb{C}^{m^g}$、V_m の基底を $\{\delta_a\}_{a\in B_m}$、その座標を $(u_a)_{a\in B_m}$（$B_m = (m^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^g$）とする。テータ関数の基本定理 ([I]) より、次の同型が存在する：

$$\psi : \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_g} \otimes V_m \cong p_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}}(m[\Theta]) = p_*L^m, \quad \psi(\delta_a) = \theta_{a,0}(m\,z, m\,\tau). \tag{4.5}$$

$\pi : \Theta_m \to \mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g$ を完備線形系 $|L^m|$ に属する因子族とする：

$$\Theta_m := \{(u, z, \tau) \in \mathbb{P}(V_m) \times \mathbb{A};\ \sum_{a\in B_m} u_a\,\theta_{a,0}(m\,z, m\,\tau) = 0\}. \tag{4.6}$$

$\mathcal{D}_{g,m} := \{(u,\tau) \in \mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g;\ Sing\,\Theta_{m,(u,\tau)} \neq \emptyset\}$ を判別式軌跡とする。
$p_2 : \mathcal{D}_{g,m} \to \mathfrak{S}_g$ を射影とすれば、そのファイバー $\mathcal{D}_{g,m,\tau}$ は (A_τ, L_τ^m) の射影双対に他ならない。テータ関数の変換公式 ([I]) より、準同型 $\rho_m : \Gamma_g(1,2) \to U(V_m)$ が存在して、$\Gamma_g(1,2)$ は $\mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g$ に作用する。この作用は Θ_m を保ち、ファイバーをファイバーに移すので $\mathcal{D}_{g,m}$ にも作用する。(4.2)、(4.3)、(4.4) と同様にして次がわかる。

命題 4.3. 次の $\Gamma_g(1,2)$-層の同型が成立する：

$$\lambda_{\Theta_m}^{(-1)^g} \cong_{\Gamma_g(1,2)} \lambda_{\mathbb{A}}^{(-1)^g} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_m)}(m^g) \otimes (p_* \omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g})^{\otimes m^g}.$$

$\{\phi_I\}_{|I|=m^g}$ を次で定義すれば：

$$\phi_I(\tau, u) := u^I \frac{\prod_{a\in B_m} \theta_a}{(\sum_{b\in B_m} u_b \theta_b)^{m^g}} (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)^{m^g},$$

任意の $\tau \in \mathfrak{S}_g$ に対して、$\{1_{\mathbb{A}}^{(-1)^g} \otimes \phi_I\}_{|I|=m^g}$ は $H^0(\mathbb{P}(V_m) \times \{\tau\}, \lambda_{\Theta_m}^{(-1)^g})$ の基底である。

5. Andreotti-Mayer 形式

5.1 Andreotti-Mayer 形式.

定義. $f(\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$ が $\Gamma'(\subset \Gamma_g)$ に関する重さ k の指標 χ 付き保型形式

$$\overset{def}{\iff} \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma', \quad f(\gamma \cdot \tau) = \det(C\tau + D)^k \cdot \chi(\gamma) \cdot f(\tau).$$

$\Gamma' = \Gamma_g,\ \chi = 1$ の時、$f(\tau)$ は重さ k の *Siegel* 保型形式と呼ばれる。

$g_{\Theta_\tau} := g_\tau|_{\Theta_\tau}$ を Θ_τ の Kähler 計量（$g_\tau = {}^t dz(Im\tau)^{-1} d\bar{z}$）、

$\tau(\Theta_\tau)$ を $(\Theta_\tau, g_{\Theta_\tau})$ の解析的トーションとする。

定理 5.1([Y2]). N_g を零因子に持つ重さ $\frac{(g+3)\cdot g!}{2}$ の *Siegel* 保型形式$\Delta_g(\tau)$ が存在して、次が成立する（テータ因子に対する *Kronecker* 極限公式）：

$$\tau(\Theta_\tau) = \left\{ (\det Im\,\tau)^{\frac{g+3}{2(g+1)}} \cdot |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2}{(g+1)!}} \right\}^{(-1)^{g+1}}.$$

$\Delta_g(\tau)$ についてもう少し詳しいことがわかる。

$\forall \quad a, b \in \mathbb{F}_2^g$、テータ定数を次式で定める：

$$\theta_{a,b}(\tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left({}^t(m + \frac{1}{2}a)\,\tau\,(m + \frac{1}{2}a) + {}^t(m + \frac{1}{2}a)\,b \right). \tag{5.1}$$

$((a,b) \neq 0 \implies \theta_{a,b}(\tau) = 0, \qquad (a,b) = 0 \implies \theta_{a,b}(\tau) \neq 0.)$

$\chi_g(\tau) := \prod_{(a,b)=0} \theta_{a,b}(\tau)$ を偶テータ定数全部の積とする。

命題 5.1. *Siegel* 保型形式 $J_g(\tau)$ が存在して、次が成立する：

$$\Delta_g(\tau) = \chi_g(\tau) \cdot J_g(\tau)^2.$$

これより $g < 5$ の時、$\Delta_g(\tau)$ を定数倍を除いて決定できる。

$$\Delta_g(\tau) = \chi_g(\tau) \quad (g = 2,\ 3), \quad \Delta_4(\tau) = \chi_4(\tau) \cdot J_4(\tau)^2. \tag{5.2}$$

ここで、$J_4(\tau) \in \mathbb{Z}[\theta_{a,b}(\tau)]_{a,b\in\mathbb{F}_2^g}$ は Schottky により発見された保型形式である。（テータ定数による J_4 の表示は一意的ではない。）

命題 5.2(**Schottky、Beauville、井草**). $J_4(\tau)$ は $\mathfrak{S}_4$ の中で種数 4 の曲線の *Jacobian* を特徴付ける。

5.2 一般の豊富因子に付随した保型多項式.

$\pi : \Theta_m \to \mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g$ を完備線形系 $|L^m|$ に属する因子族（$m \geq 2$）とする。

$g_{\Theta_m/\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g}$ を $g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$ から定まる $T\Theta_m/\mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g$ の Kähler 計量、

$\|\cdot\|_Q$ を λ_{Θ_m} の $g_{\Theta_m/\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g}$ に関する Quillen 計量とする。

定理 5.1 は次のように一般化される。

定理 **5.2([Y2])**. $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$-係数の多項式$\Delta_{g,m}(u,\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)[u_a]_{a\in B_m}$ と

指標 $\chi_{g,m} : \Gamma_g(1,2) \to U(1)$ が存在して次が成立する：

(1) $\deg_u \Delta_{g,m} = (g+1)!\, m^g, \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1,2),$

$$\Delta_{g,m}(\gamma \cdot u, \gamma \cdot \tau) = \chi_{g,m}(\gamma) \cdot \det(C\tau + D)^{\frac{1}{2}(g+3)\cdot g!m^g} \cdot \Delta_{g,m}(u,\tau),$$

(2) $\forall 1_{\mathbb{A}}^{(-1)^g} \otimes \phi_I \in H^0(\mathbb{P}(V_m) \times \{\tau\}, \lambda_{\Theta_m}^{(-1)^g}) \cong Sym^{m^g}(V_m),$

$$\|1_{\mathbb{A}}^{(-1)^g} \otimes \phi_I\|_Q^2(u,\tau) = (\det Im\tau)^{\frac{(g-1)m^g}{2(g+1)}} \left| \frac{u^I}{\Delta_{g,m}(u,\tau)^{\frac{1}{(g+1)!}}} \right|^2,$$

(3) 因子の意味で $(\Delta_{g,m})_0 = \Pi^*\mathcal{D}_{g,m}$ （$\Pi : V_m \dashrightarrow \mathbb{P}(V_m)$ は自然な射影）.

<u>例</u>. $\Delta_{2,2}(u,\tau)$ と *Kummer* の 4 次式

A_τ を周期 τ の Abel 曲面、 $K_\tau = A_\tau/\pm 1$ をその Kummer 曲面とする。
K_τ は 4 次曲面として表せる：

$$K_\tau = \{(u_0 : u_1 : u_2 : u_3) \in \mathbb{P}^3;\ F(u,\tau) = 0\}. \tag{5.3}$$

ここで、$F(u,\tau)$ は Kummer の 4 次式で、次式で与えられる：

$$\begin{aligned} F(u,\tau) =& A(\tau)(u_0^4 + u_1^4 + u_2^4 + u_3^4) + B(\tau)(u_0^2u_3^2 + u_1^2u_2^2) \\ &+ C(\tau)(u_1^2u_3^2 + u_2^2u_0^2) + D(\tau)(u_2^2u_3^2 + u_0^2u_1^2) + 2E(\tau)u_0u_1u_2u_3. \end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで、$A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$, $E(\tau)$ は次式で定まる保型形式である：

$$A(\tau) := (\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \tag{5.5}$$

$$B(\tau) := (\beta^4 + \gamma^4 - \alpha^4 - \delta^4)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \tag{5.6}$$

$$C(\tau) := (\gamma^4 + \alpha^4 - \beta^4 - \delta^4)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \tag{5.7}$$

$$D(\tau) := (\alpha^4 + \beta^4 - \gamma^4 - \delta^4)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2), \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} E(\tau) :=& \alpha\beta\gamma\delta(\delta^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)(\delta^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2) \\ &\times (\delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2), \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} &\alpha(\tau) := \theta_{\frac{1}{2}000}(0,2\tau), \quad \beta(\tau) := \theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}00}(0,2\tau), \\ &\gamma(\tau) := \theta_{0\frac{1}{2}00}(0,2\tau), \quad \delta(\tau) := \theta_{0000}(0,2\tau). \end{aligned} \tag{5.10}$$

$H_{2,2} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \subset Aut(K_\tau) \cap PGL(4;\mathbb{C})$ を Heisenberg 群とする。
$H_{2,2}$ は次の 4 元で生成される：$H_{2,2} =< \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 >$,

$$\sigma_1 : (u_0, u_1, u_2, u_3) \to (u_2, u_3, u_0, u_1), \tag{5.11}$$

$$\sigma_2 : (u_0, u_2, u_3, u_4) \to (u_1, u_0, u_3, u_2), \tag{5.12}$$

$$\sigma_3 : (u_0, u_1, u_2, u_3) \to (u_0, u_1, -u_2, -u_3), \tag{5.13}$$

$$\sigma_4 : (u_0, u_1, u_2, u_3) \to (u_0, -u_1, u_2, -u_3). \tag{5.14}$$

$\sigma \in H_{2,2}$ に対して、$(u_0^\sigma, u_1^\sigma, u_2^\sigma, u_3^\sigma) := \sigma \cdot (u_0, u_1, u_2, u_3)$ と書く。この時、K_τ の特異点は次で与えられる：

$$(5.15) \qquad Sing\, K_\tau = \{(\alpha(\tau)^\sigma, \beta(\tau)^\sigma, \gamma(\tau)^\sigma, \delta(\tau)^\sigma)\}_{\sigma \in H_{2,2}}.$$

$G(u,\tau)$ を $Sing\, K_\tau$ の射影双対の定義方程式とする：

$$(5.16) \qquad G(u,\tau) := \prod_{\sigma \in H_{2,2}} (\alpha(\tau)^\sigma u_0 + \beta(\tau)^\sigma u_1 + \gamma(\tau)^\sigma u_2 + \delta(\tau)^\sigma u_3).$$

定理 5.2 と Kummer 曲面の射影双対に関する自己双対性により、次の定理を得る。

<u>定理 **5.3**</u>(**[Y2]**). 定数 $C_{2,2}$ が存在して、次が成立する：

$$\Delta_{2,2}(u,\tau) = C_{2,2} \cdot F(u,\tau)^2 \cdot G(u,\tau).$$

定理 5.2 と定理 5.3 から決まる $\Delta_{2,2}$ の次数と重さを計算してみよう。

$$\deg_u \Delta_{2,2}(u,\tau) = (2+1)! \cdot 2^2 = 24 = 4 \times 2 + 16 = \deg_u F(u,\tau)^2 G(u,\tau)$$

$$wt_\tau \Delta_{2,2}(u,\tau) = \frac{(2+3)\cdot 2! \cdot 2^2}{2} = 20 = (\frac{12}{2}) \times 2 + \frac{1}{2} \times 16 = wt_\tau F(u,\tau)^2 G(u,\tau).$$

<u>注意</u>. 定理 *5.3* より $|2\Theta_\tau|$ に属する A_τ の因子の解析的トーションが *Kummer* の 4 次式とその特異点の射影双対、及び周期の行列式の積で表される事がわかる。同様に、種数 3 の曲線の解析的トーションも同様のデータで書けることがわかる。($|2\Theta_\tau|$ に属する因子は種数 3 曲線の不分岐 2 重被覆として表されることに注意。) 周期の行列式はパラメータ空間 ($\mathfrak{S}_3$ 又は $\mathfrak{S}_2 \times \mathbb{P}^3$) 上の一般化された超幾何関数で書けると思われるが、具体的な式を筆者はまだ得ていない。

g 及び m が大きくなった場合の $\Delta_{g,m}(u,\tau)$ の具体的な表示については、筆者はなにもしらない。基本的には *Abel* 多様体の射影双対の定義方程式を計算する事に帰着するが、その方法を筆者は知らないからである。

5.3 <u>定理 **5.1** の証明の方針</u>.

(1) $g_E := {}^t dz \cdot d\bar{z}$ を $T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g$ の Euclid 計量、

$g_{E,\Theta/\mathfrak{S}_g}$ を g_E から定まる相対接束 $T\Theta/\mathfrak{S}_g$ の Kähler 計量、

$\|\cdot\|'_Q$ を $g_{E,\Theta/\mathfrak{S}_g}$ に関する λ_Θ の Quillen 計量とする。

Debbare の定理 ([D]) と定理 2.3, 2.4 より次が従う：

$$c_1(\lambda_\Theta, \|\cdot\|'_Q) = \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!}\delta_{N_g}. \tag{5.17}$$

これより、$\Delta_g(\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$ が存在して次が成立する：

$$(\Delta_g)_0 = N_g, \quad \|\sigma_\Theta\|'^2_Q(\tau) = |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}}. \tag{5.18}$$

(2) 定理 2.2 より次がわかる：$\forall\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1,2)$、

$$\log\left(\frac{\gamma^*\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|'_Q}(\tau)\right)^2 = \frac{(-1)^g(g-1)}{g+1}\log|\det(C\tau + D)|. \tag{5.19}$$

即ち、$\Delta_g(\tau)$ は $U(1)$-指標付きの $\Gamma_g(1,2)$ に関する保型形式である。Γ_g と N_g の性質から $\Delta_g(\tau)$ はΓ_g に関する保型形式で指標は自明である。

(3) 再び定理 2.2 より次がわかる：

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q}\right)^2 = \frac{(-1)^g(g+1)}{2(g+1)}\log\det Im\tau. \tag{5.20}$$

(5.18) と (5.20) より

$$\|\sigma_\Theta\|^2_Q(\tau) = (\det Im\tau)^{\frac{(-1)^g(g-1)}{2(g+1)}}|\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}} \tag{5.21}$$

となるので、

$$\log\|\sigma_\Theta\|^2_{L^2}(\tau) = (-1)^g\log(2\pi)^g\det Im\tau \tag{5.22}$$

と組み合わせて定理を得る。 □

REFERENCES

[B-B]. Bismut, J.-M., Bost, J.-B., *Fibrés déterminants, métrique de Quillen et dégénérescence des corbes*, Acta Math. **165** (1990), 1-103.

[B-G-S]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[D]. Debarre, O., *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 687-708.

[I]. Igusa, J.-I., *Theta functions*, Springer.

[J-K]. Jorgenson, J. and Kramer, J., *Towards the arithmetic degree of line bundles on abelian varieties*, preprint (1997).

[J-T1]. Jorgenson, J., Todorov, A., *A conjectured analogue of Dedekind's eta function for $K3$ surfaces*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 359-376.

[J-T2]. ———, *Analytic discriminants for manifolds with canonical class zero*, Symposia Math. **36** (1996), 223-260.

[K]. Katz, N., *Pinceaux de Lefschetz: théorèm d'existence, Group de monodromie en géometrie algébrique, Expose XVII, SGA 7,II*, Lect. Notes Math. **340** (1973), 213-253.

[Y1]. Yoshikawa, K.-I., *Smoothing of isolated hypersurface singularities and Quillen metrics*, preprint (1997).

[Y2]. ———, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, preprint (1997).